

# **EQUIVALÊNCIA VOLUMÉTRICA: Uma Nova Metodologia para Estimativa do Volume de Árvores**

## *Volumetric Equivalence: A New Methodology for Tree Volume Estimation*

Sylvio Péllico Netto<sup>1</sup>

### **Resumo**

Volumetria de árvores sempre constituiu um dos problemas básicos na realização de inventários florestais. A metodologia matemática usada para o aprimoramento da volumetria de árvores sempre foi fundamentada em volume de sólidos geométricos regulares, com o objeto de se aproximar ao máximo ao volume real dessas. Constituiu objetivo deste trabalho apresentar uma nova metodologia para estimativa do volume de árvores, com a denominação de Equivalência Volumétrica, fundamentada no princípio de que sempre será possível obter o volume de um cilindro regular equivalente ao volume real de uma árvore. A nova proposta foi aplicada a árvores nativas de *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Kuntze, amostradas na Estação Experimental de São João do Triunfo, PR, da UFPR, e comparada com outras alternativas para obtenção de volumes individuais, como função volumétrica e funções de forma. O erro médio para a aplicação da nova metodologia, calculado em função dos volumes reais das árvores amostradas, resultou em 5,6%, igual ou inferior aos obtidos para as demais metodologias testadas.

**Palavras-chave:** Volumetria de Árvores; Dendrometria; Inventários Florestais.

### **Abstract**

The volume estimation is a basic problem when conducting forest inventories. The mathematical methodology used for volume estimation improvement was always based on regular geometrical solids, aiming to approximate as close as possible to the real tree volume. The objective of this paper was to present a new methodology to estimate tree volume, namely Volumetric Equivalence, based on the principle that it is possible to get a regular cylindrical volume equivalent to the real tree volume. The new proposal was tested in native trees of *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Kunze, sampled in the São João do Triunfo Experimental Station, belonging to the Federal University of Paraná, and compared to other alternatives for volume estimation, using a volume function and taper functions. The average sampling error resulted from the application of this new methodology was 5.6%, equal or smaller than those obtained from the application of the other procedure.

**Keywords:** Tree Volume Estimation; Forest Mensuration; Forest Inventories.

---

<sup>1</sup> Professor Titular de Centro de Ciências Agrárias e Ambientais, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná e professor sênior do Curso de Pós-Graduação em Engenharia da UFPR. Pellico.sylvio@pucpr.br. Rua Rocha Pombo, 791, CEP: 80.530-290, Curitiba, PR.

## Introdução

Desde os primórdios da ciência florestal, que já conta com mais de 500 anos, a volumetria de árvores constituiu um tema relevante, dado a madeira ter participado intensamente na vida do homem, por meio da habitação, dos móveis e da arte. Quantificar a madeira foi, portanto, importante para obtenção do seu estoque na floresta e, depois de cortada, para disponibilizá-la à manufatura.

A partir de ampla avaliação da metodologia matemática usada para o aprimoramento da volumetria de árvores, sempre fundamentada no volume de sólidos regulares, foi possível produzir uma síntese do que consta na literatura até o presente momento.

A volumetria trata, fundamentalmente, de uma avaliação de subconjuntos para se obter o volume de madeira em uma unidade de área, geralmente 1 hectare. Primeiramente se considera as árvores de uma espécie, depois se pode formar um subconjunto com espécies que apresentam similaridades de forma e tamanho, e assim por diante. Árvores em florestas naturais apresentam-se com características mais complexas e complicadas que árvores plantadas, assim como árvores coníferas apresentam fustes mais regulares que árvores folhosas.

Todas estas variações se colocam como desafios para os biometristas, quando se deseja formular uma metodologia apropriada para a obtenção do volume real de madeira de cada uma das árvores que se encontra na floresta.

Os procedimentos conhecidos na literatura foram desenvolvidos ao longo dos dois últimos séculos, com expressiva contribuição dos biometristas alemães e de outros oriundos de países europeus, tendo sido ampliada a contribuição dos pesquisadores americanos e canadenses após a primeira grande guerra.

A contribuição brasileira é tardia, dado a primeira Escola de Engenharia Florestal somente ter sido criada em 1960, em Viçosa, MG e posteriormente transferida para Curitiba em 1964, quando se intensificou a produção na ciência florestal no Brasil.

O autor, tendo estado na Alemanha no período de 1977 a 1979, conseguiu reunir as mais importantes contribuições científicas sobre volumetria produzida até aquela época, principalmen-

te porque o Professor Michail Prodan havia reunido em sua biblioteca, em Freiburg, os mais importantes trabalhos produzidos sobre volumetria na Europa, inclusive aqueles escritos no final do século XVIII.

Constitui objetivo do presente trabalho apresentar uma nova metodologia para estimativa do volume de árvores, com a denominação de Equivalência Volumétrica, que será sintetizada a partir das demais metodologias anteriores e ilustrada com árvores da espécie *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Kuntze.

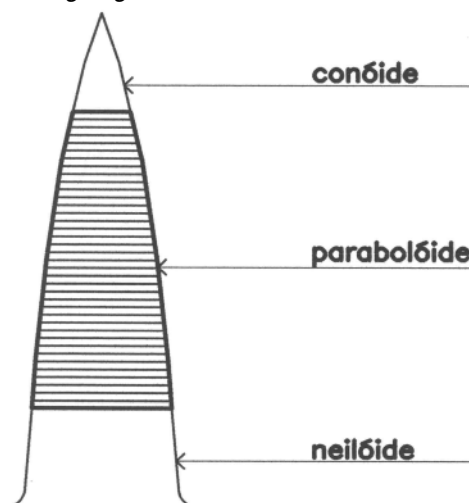
## Procedimentos para obtenção da volumetria de árvores

Para uma melhor compreensão do que será apresentado a seguir, é importante que sejam assumidas algumas premissas utilizadas na pesquisa volumétrica de árvores:

- A base referencial para cálculo do volume de uma árvore pressupõe um sólido geométrico, tendo um círculo como aproximação ao polígono referencial tomado geralmente a 1,30 m a partir do solo (convenção internacional);
- A árvore é referenciada de maneira seccionada e composta de três sólidos geométricos, denominados da base para o topo: um neilóide, um parabolóide e um conóide. Figura 1;

### Figura 1 – Composição estrutural da volumetria de uma árvore usando-se sólidos regulares.

Figure 1 - Structural configuration of a tree volume using regular bodies.



- As teorias foram desenvolvidas para sólidos próximos aos volumes de árvores que apresentam formas estruturais estáveis, mais comumente observadas nas espécies coníferas, como a araucária, os pinus e em algumas folhosas, como o jequitibá, o guaritá e a castanheira;
- Volumetria para árvores fracionadas em galhos e muito irregulares na composição dos seus fustes deve ser tratada de maneira especial no processo de estimação volumétrica.

A formalização do novo conceito teórico para cálculo volumétrico de árvores, com a denominação de Equivalência Volumétrica, será fundamentada em uma revisão dos procedimentos já conhecidos.

Fundamentalmente, podem-se apresentar três procedimentos para a avaliação da volumetria de árvores consagrados na literatura: Fator de Forma, Função Volumétrica e Função de Forma.

### Fator de forma

Neste procedimento, o volume de uma árvore é obtido por uma equação volumétrica resolvida em função das variáveis diâmetro, altura da árvore e sua forma, funcionando como um fator de redução ao volume de um cilindro, tomado com base em um círculo, cujo diâmetro pode ser genericamente definido como  $d_x$ . Este é o mais antigo procedimento conhecido na literatura e foi concebido, valendo-se do princípio geométrico da rotação dos corpos.

$$V_1 = \frac{\pi}{4} d_x^2 h \lambda_x \quad (1)$$

onde:

$x$  = variável contínua tal que  $0 \leq x \leq h$

$V_1$  = volume da árvore

$d_x$  = diâmetro, geralmente medido com casca num ponto  $x$  da árvore. Por convenção internacional, quando este é tomado a 1,30 m do solo, é conhecido na literatura como DAP (Diâmetro à Altura do Peito) e  $d_{1,30}$  = DAP

$h$  = altura da árvore. No caso de se tomar volumes parciais nas árvores usam-se  $h_p$  ou  $h_c$ , para se referenciar uma altura parcial, por exemplo co-

mercial, ou a altura tomada até o início da copa da árvore

$\lambda_x$  = variável complementar de redução ou correção do volume de um cilindro para o volume da árvore.

Denominando-se  $W_x$  como o volume do cilindro tomado na base  $x$ , tem-se que:

$$W_x = \frac{\pi}{4} d_x^2 h \quad (2)$$

e, conseqüentemente:

$$V_1 = W_x \lambda_x \quad (3)$$

Teoricamente pode-se observar que isolando-se  $\lambda_x$  na igualdade (3), tem-se que

$$\lambda_x = \frac{V_1}{W_x} \quad (4)$$

Esta relação depende, portanto, do conhecimento do volume real da árvore  $V_1$ , para que se possa obter uma distribuição estatística de  $\lambda_x$ .

Prodan (1965) apresentou a teoria para se obter este volume real, valendo-se de uma sucessão de diâmetros  $d_x$  medida em intervalos no fuste, tão pequeno quanto se queira, conforme se procede nos cálculos por integração.

$$V_1 = \frac{\pi}{4} (d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_k^2) t$$

$$V_1 = \pi \left( \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_3^2}{4} + \dots + \frac{d_k^2}{4} \right) t \quad (5)$$

$$V_1 = \pi \left( y_1^2 t + y_2^2 t + y_3^2 t + \dots + y_k^2 t \right)$$

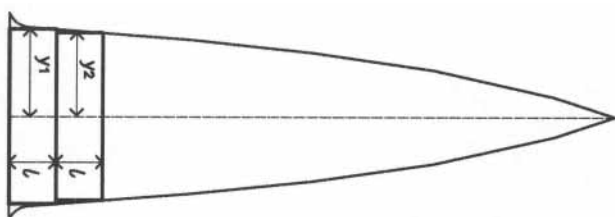
$$V_1 = \pi \int_0^t y^2 d_x$$

onde  $t = d_x$ , um valor infinitamente pequeno.

No presente caso, a variável “ $y$ ” representa uma função matemática que passa pelos extremos da sucessão dos diâmetros, tomados da base ao topo da árvore, que por integração e rotação em torno do eixo central da árvore gera seu volume real  $V_1$ , conforme pode-se observar na Figura 2.

**Figura 2 - Concepção para a geração do volume real da árvore por meio da rotação dos corpos**

*Figure 2 - Conception for the tree volume generation through bodies rotation*



Pragmaticamente, tal solução não é exequível praticamente. Vários pesquisadores propuseram tomar “ $l$ ” como uma medida finita e plausível, de tal forma a atender a condição estatística de aceitável precisão na obtenção dos volumes parciais, distribuídos ao longo do fuste da árvore. Nestas condições, tem-se que:

$$V_l = \sum_{x=0}^L y^2 \Delta_y \quad \text{onde } t = \Delta_y \quad (6)$$

Constam da literatura e de uso prático várias metodologias para se obter uma estimativa consistente de  $V_1$ , destacando-se entre elas as de Smalian (1804), Huber (1828), Riecke (1840), Hossfeld (1849), Breymann (1868), e Simoni (1904), todas fundamentadas na concepção da rotação dos corpos, valendo-se dos sólidos cilindro, parabolóide, conóide e o neilóide. Como estes autores se situam no século XIX, suas publicações foram ordenadas e referenciadas em Prodan (1965).

A primeira proposição, denominada em alemão de “fórmula dos extremos do segmento”, é atribuída a Smalian (1804), a segunda, denominada em alemão de “fórmula do meio do segmento”, é atribuída a Krünitz (1781) e Huber (1828), porém conhecida como de Huber, a terceira, denominada de “fórmula combinada”, é atribuída a Newton, embora conste na literatura a aplicação prática por Riecke (1840), a quarta, atribuída a Hossfeld (1849), aplica ponderações, de acordo com a forma do segmento, a quinta, atribuída a Simoni (1904), também aplica ponderações, de acordo com a forma do segmento.

Tomando-se  $D_y$  um tamanho acessível e seccionando-se o fuste da árvore em toras, podem-se calcular os volumes destas partes e somá-las para se obter o volume real deste. A maioria dos pesquisadores acima mencionados cita que o seccionamento do fuste em 5 partes já resulta em boa aproximação do volume real da árvore. O seccionamento em 10 toras aproxima sensivelmente a este resultado.

**Quadro 1 - Relação dos modelos matemáticos para cálculo de volume de árvores**

Chart 1 - Relation of the mathematical models for tree volume calculation

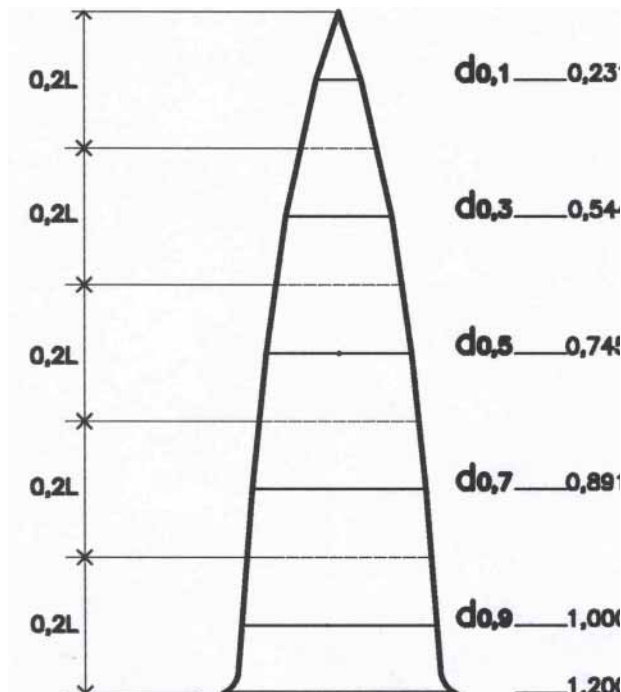
Modelo N.º	Modelo	Autor	Ano
1	$V = (g_u + g_o) \frac{l}{2} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_u^2 + d_o^2}{2} \right) l$	Smalian	1804
2	$V = l g_{1f} = \frac{\pi}{4} d_{1f}^2 l$	Krönitz Huber	1781 1828
3	$V = \frac{l}{6} (g_u + 4 g_{1f} + g_o) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_u^2 + 4 d_{1f}^2 + d_o^2}{6} \right) l$	Riecke	1849
4	$V = \frac{l}{4} (3 g_{13} + g_o) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{3 d_{13}^2 + d_o^2}{4} \right) l$ $V = \frac{l}{4} (3 g_{1f} + g_{2f}) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{3 d_{1f}^2 + d_{2f}^2}{4} \right) l$ $V = \frac{l}{8} (g_u + 2 g_{1f} + 2 g_{17} + 2 g_{34} + g_o) =$ $= \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_u^2 + 2 d_{1f}^2 + 2 d_{17}^2 + 2 d_{34}^2 + d_o^2}{8} \right) l$	Hossfeld	1849
5	$V = \frac{1}{3} (2 g_{14} - g_{12} + 2 g_{14}) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{2 d_{14}^2 - d_{12}^2 + 2 d_{14}^2}{3} \right) l$ $V = \frac{1}{3} (g_{1f} + g_{12} + g_{5f}) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_{1f}^2 + d_{12}^2 + d_{5f}^2}{3} \right) l$ $V = \frac{1}{3} (g_{1f} + g_{12} + g_{5f}) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_{1f}^2 + d_{12}^2 + d_{5f}^2}{3} \right) l$	Simoni	1904

Particularmente importante neste contexto destaca-se o método que resulta na obtenção no fator de forma natural, por meio da medição dos diâmetros do fuste sempre em posições relativas de sua altura, o que permite tornar tais medidas comparáveis em quaisquer condições dimensionais do tronco (HOHENADL, 1924). Naturalmente

te que Hohenadl criou o conceito de quocientes de forma ( $\eta_i$ ) para permitir tais comparações, a partir da definição de um diâmetro base, no caso o diâmetro tomado na décima parte da altura, ou seja ( $d_{0,9}$ ), acessível para a medição no fuste, conforme está apresentado na Figura 3.

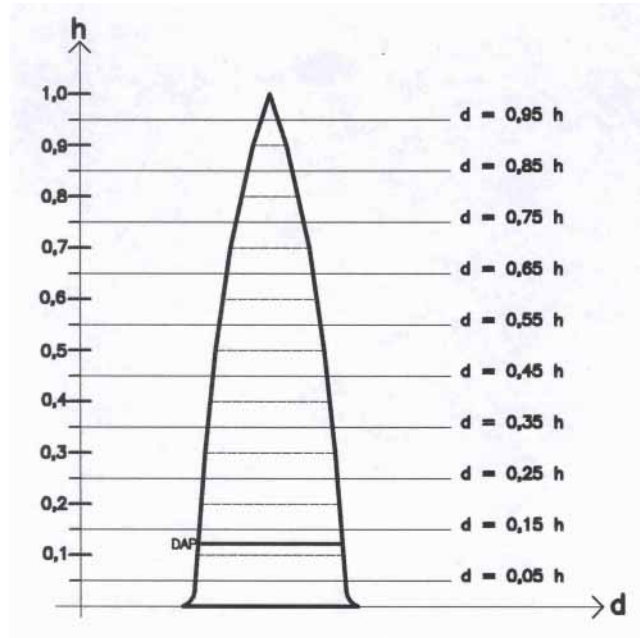
**Figura 3 - Medidas relativas em 5 diâmetros no fuste em função da altura.**

Figure 3 - Relative measurements in 5 diameters in the shaft as function of the tree height.



**Figura 4 - Medidas relativas tomadas em 10 diâmetros no fuste em função da altura.**

Figure 4 - Relative measures taken in 10 diameters in the shaft as function of the tree height.



Considerando-se que o fator de forma natural é o resultado da divisão do volume real da árvore ( $V_1$ ) pelo volume de um cilindro ( $W_x$ ), com base no diâmetro de referência ( $d_{0,9}$ ), tem-se que:

$$\lambda_x = \frac{V_1}{W_x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2$$

onde  $n$  = número de seções relativas tomadas na árvore e  $\eta_i = \frac{d_x}{d_{0,i}}$  quocientes de forma, para  $i$  = fração da altura da árvore ( $h$ ). No caso de  $0,i = 0,9$  e  $n=5$  tem-se que  $d_{0,i} = d_{0,9}$ ,  $W_x = W_{0,9}$  e

$$\lambda_{0,9} = 0,2 \left[ 1,000 + \left( \frac{d_{0,7}}{d_{0,9}} \right)^2 + \left( \frac{d_{0,5}}{d_{0,9}} \right)^2 + \left( \frac{d_{0,3}}{d_{0,9}} \right)^2 + \left( \frac{d_{0,1}}{d_{0,9}} \right)^2 \right] \quad (7)$$

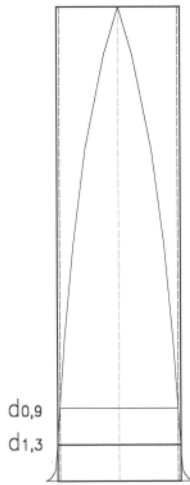
Uma ilustração da concepção de Hohenadl com toras segmentadas em 10 partes está apresentada na Figura 4

Conforme definido em (1), se for utilizada a metodologia de Hohenadl, então o volume das árvores será obtido como segue:

$$V_1 = \frac{\pi}{4} d_{0,9}^2 h \lambda_{0,9}$$

Em várias circunstâncias, os usuários não medem as árvores na posição  $d_{0,9}$ , quando estão efetuando os inventários florestais nas empresas. Nestas circunstâncias, pode-se equacionar o problema operando-se com o Fator de Forma Artificial, referenciado no diâmetro tomado a 1,30, ou  $d_{1,30}$ , conforme está ilustrado na Figura 5.

**Figura 5 - Relação da volumetria tomada nos diâmetros  $d_{0,9}$  ou  $d_{1,30}$**   
 Figure 5 - Tree volume relationship taken in the  $d_{0,9}$  or  $d_{1,30}$  diameters



Então:

$$\lambda_{1,30} = f_{1,30} = \frac{V_1}{W_{1,30}} \quad (8)$$

A equivalência dos dois fatores de forma pode ser obtida a partir dos dados que geraram sua obtenção no seccionamento dos troncos:

$$V_1 = W_{1,30} \cdot \lambda_{1,30} = W_{0,9} \cdot \lambda_{0,9} \quad (9)$$

Portanto:

$$f_{1,30} = \frac{W_{0,9}}{W_{1,30}} \cdot \lambda_{0,9} = \frac{d_{0,9}^2}{d_{1,30}^2} \cdot \lambda_{0,9} = \left( \frac{d_{0,9}}{d_{1,30}} \right)^2 \cdot \lambda_{0,9}$$

Definindo-se  $(d_{0,9}/d_{1,30})$  como um quociente de forma natural, ou  $K_{0,9/1,30}$  tem-se que

$$f_{1,30} = K_{0,9/1,30}^2 \cdot \lambda_{0,9} \quad (10)$$

Igualmente pode-se calcular o fator de forma natural como função do fator de forma artificial, valendo-se do quociente de forma artificial  $K_{1,30/0,9}$ .

$$\lambda_{0,9} = K_{1,30/0,9}^2 \cdot \lambda_{1,30} \quad (11)$$

### Equivalência volumétrica

O conceito de equivalência volumétrica está sendo proposto neste trabalho, a partir do que Péllico Netto (1979) formalizou teoricamente para o desenvolvimento de sua função volumétrica, conforme está apresentado em (12).

Considere a formulação de Hohenadl para a obtenção do Fator de Forma Natural,  $\lambda_x$ , ou seja

$$\lambda_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 = \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{d_{0,9}}{d_{0,i}} \right)^2 + \left( \frac{d_{0,7}}{d_{0,i}} \right)^2 + \left( \frac{d_{0,5}}{d_{0,i}} \right)^2 + \left( \frac{d_{0,3}}{d_{0,i}} \right)^2 + \left( \frac{d_{0,1}}{d_{0,i}} \right)^2 \right] \quad (12)$$

Nesta formulação, pode-se observar que o Fator de Forma Natural  $\lambda_x$  é uma média aritmética quadrática dos quocientes de forma naturais,  $\eta_i$ , referenciados a um diâmetro  $d_{0,i}$ . Hohenadl propôs que este diâmetro fosse tomado no décimo da altura da árvore ( $d_{0,9}$ ), conforme está apresentado em (7).

Péllico Netto (1979) propôs modificações na formulação de Hohenadl como segue:

$$\lambda_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 = \frac{1}{d_{0,i}^2} \left[ \frac{d_{0,9}^2 + d_{0,7}^2 + d_{0,5}^2 + d_{0,3}^2 + d_{0,1}^2}{n} \right] \quad (13)$$

Como se pode observar, o que se encontra dentro do parêntesis é a média quadrática dos diâmetros tomados ao longo do fuste da árvore  $d_q^2$ , o que resulta em:

$$\lambda_x = \frac{1}{d_{0,i}^2} (d_q^2) = \frac{d_q^2}{d_{0,i}^2} = \left( \frac{d_q}{d_{0,i}} \right)^2 \quad (14)$$

Tomando-se agora  $d_{0,i}$  exatamente na posição onde se localiza o diâmetro quadrático ( $d_q$ ), tem-se

$$\lambda_x = \left( \frac{d_q}{d_q} \right)^2 = 1^2 = 1 \quad (15)$$

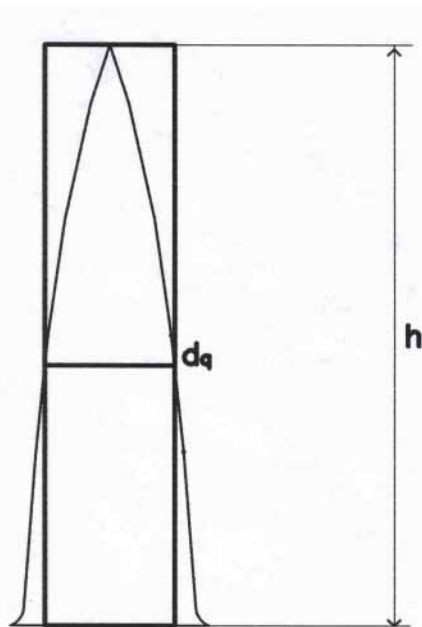
Nestas circunstâncias, com o Fator de Forma Natural igual a 1, o volume da árvore será obtido como segue:

$$V = W_q = \frac{\pi}{4} d_q^2 h \quad I = \frac{\pi}{4} d_q^2 h \quad (16)$$

Esta é uma realidade especial, pois o volume real da árvore é igual a um volume de um cilindro regular, com base em  $d_q$ , daí resultando a concepção de **Equivalência Volumétrica**, que está ilustrada na Figura 6.

**Figura 6 - Equivalência Volumétrica para Volume de Árvores.**

Figure 6 - Volumetric equivalence for tree volume.



Observe que esta é uma solução analítica muito interessante, porém apresenta problemas de ordem prática, pois o diâmetro quadrático médio ( $d_q$ ) localiza-se geralmente um pouco abaixo do ponto médio do fuste e, portanto, inacessível para medição.

Péllico Netto (1979), valendo-se das sugestões apresentadas por KO (1968), propôs o ajuste do diâmetro quadrático médio como função do diâmetro tomado a 1,30 m (DAP), valendo-se dos modelos matemáticos:

$$d_q^2 = a + b d_{1,30}^2 \quad (17)$$

ou

$$d_q^2 = a + b d_{1,30} + c d_{1,30}^2 \quad (18)$$

Tais funções apresentaram excelentes ajustes a dados experimentais, com alta correlação entre  $d_q^2$  e  $d_{1,30}$ , e, o que permitiu seu uso prático.

Pela substituição do ajuste proposto em (18) na equação volumétrica (16), resultou em

$$V = \frac{\pi}{4} h (a + b d_{1,30} + c d_{1,30}^2) \quad (19)$$

que após a incorporação da constante  $\frac{\pi}{4}$  aos

coeficientes do modelo, obteve-se a nova Função Volumétrica:

$$V = h (\beta_0 + \beta_1 d_{1,30} + \beta_2 d_{1,30}^2) \quad (20)$$

Esta função pode ser ajustada facilmente por regressão linear, uma vez que, transformando-a na forma

$$\frac{V}{h} = y = \beta_0 + \beta_1 d_{1,30} + \beta_2 d_{1,30}^2 \quad (21)$$

os coeficientes  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  podem ser facilmente obtidos pelo método dos mínimos quadrados.

Considerando-se atrativa a possibilidade de aprofundar a concepção da Equivalência Volumétrica, as seguintes evidências contribuem para tal proposta:

- Sólidos geométricos regulares podem continuar sendo referenciados para equivalência volumétrica, desde que se possa corrigir o volume cilíndrico referenciado, como um múltiplo do volume cilíndrico com base em  $d_q$ ;
- Para efeitos práticos, o cilindro mais atrativo será aquele referenciado em um diâmetro acessível tomado na base do tronco;
- A base de referência do cilindro deverá ser um diâmetro relativo e não absoluto, como o DAP, visando a viabilizar o primeiro requisito, pois que deve



estabelecer uma relação por meio de razão e não de uma função matemática, conforme já evidenciado em (17) e (18);

- Como a equivalência volumétrica é afetada pela variação de forma dos fustes, será necessário criar um corretivo acessível para tais variações, que vão,

$$V = \frac{\pi}{4} d_q^2 h \lambda_q = \frac{\pi}{4} d_q^2 h I = \frac{\pi}{4} d_{0,06}^2 h \lambda_{0,06} = \frac{\pi}{4} d_{0,06}^2 h \frac{I}{\lambda_{0,06}} \quad (22)$$

e

$$V = W_{0,06} \frac{I}{\lambda_{0,06}} \quad (23)$$

Como se pode observar, o cilindro tomado na referência  $d_{0,06}$  ( $W_{0,06}$ ) precisa ser dividido

por  $\frac{1}{\lambda_{0,06}}$  para resultar o volume do cilindro equi-

valente ao volume real da árvore  $W_q$ . Denominando-se esta variável de  $\delta$ , pode-se formalizar a solução para sua obtenção como função de outra variável acessível no fuste. Esta solução esbarra no mesmo conceito geral já apresentado anteriormente em (8) e (9), quando foram estabelecidos os critérios para se corrigir o volume real das árvores. O enfoque conceitual aqui é diferente, porquanto a correção está sendo aplicada para equivalência de volumes cilíndricos, porém remanesce a dependência de se conhecer  $\lambda_{0,06}$ , que é um valor experimental, ou obtê-lo de forma indireta.

$$\delta = \frac{1}{\lambda_{0,06}} \quad (24)$$

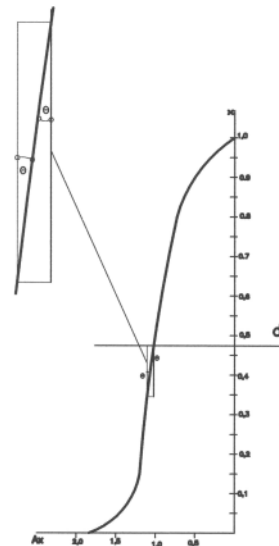
Observando-se a figura 7, pode-se detectar que existe uma única possibilidade de se estabelecer esta nova relação matemática, valendo-se da medição de um ângulo  $\phi$  formado pelo segmento do parabolóide no fuste e o segmento do cilindro que o corta exatamente no diâmetro referencial  $d_q$ .

teoricamente, desde um conóide até um cilindro absoluto.

A partir das considerações acima expostas e mudando-se a base de referência do cilindro para  $d_{0,06}$ , por considerá-la a mais apropriada do ponto de vista prático, pode-se formalizar a seguinte proposição:

**Figura 7 - Identificação do ângulo  $\phi$  formado na inserção do cilindro que passa por  $d_q$  e o fuste.**

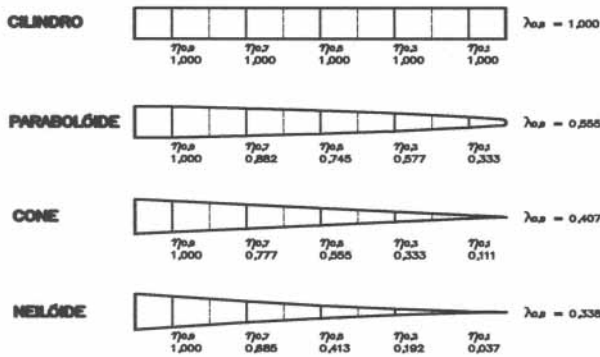
*Figure 7 - Identification of the angle  $\phi$  formed by the cylinder insertion on  $d_q$  and the shaft.*



Usando-se os sólidos geométricos clássicos, conforme está apresentado em Prodan (1965), as figuras 8 e 9 ilustrarão as variações dos quocientes de forma e dos respectivos Fatores de Forma Naturais, tendo-se como diâmetros referenciais  $d_{0,9}$  e  $d_{0,94}$  respectivamente.

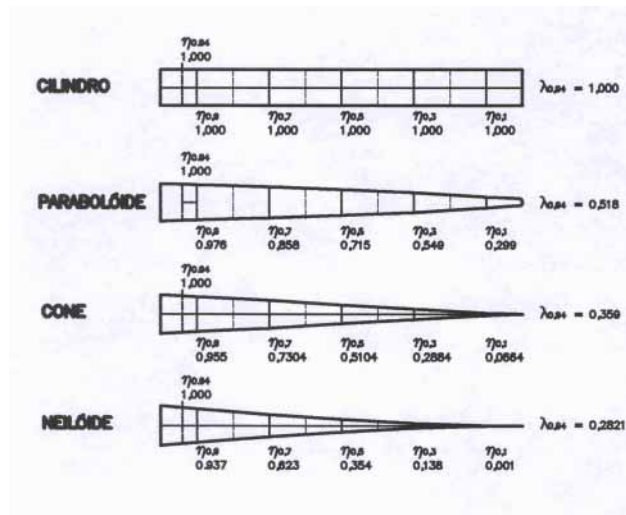
**Figura 8 - Teoria da rotação dos corpos – base de referência  $d_{0,9}$ .**

**Figure 8 - Bodies rotation theory - reference base  $d_{0,9}$**



**Figura 9 - Teoria da Rotação dos Corpos – Base de Referência  $d_{0,06}$ .**

**Figure 9 - Bodies rotation theory - reference base  $d_{0,06}$**



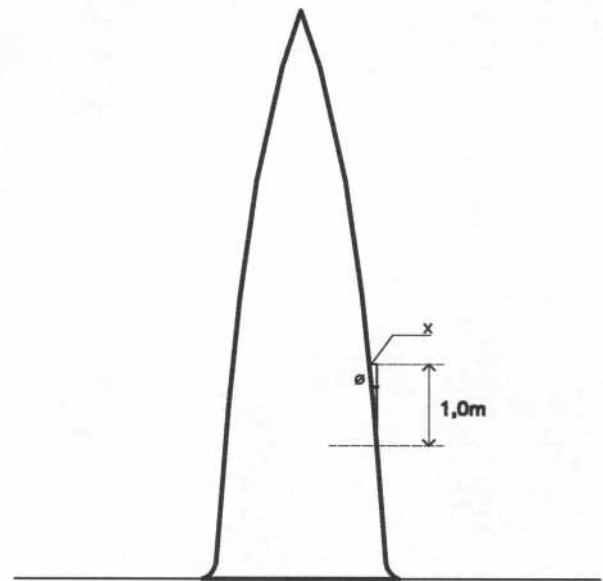
Das evidências apresentadas, pode-se afirmar que a maioria das árvores aproxima-se de um suave parabolóide, com muita proximidade a um cone em 80% do fuste, daí porque a redução de forma pode ser avaliada por meio da tangente do ângulo de inclinação do fuste  $\phi$ , conforme se evidenciou na figura 7.

Assume-se, nestas circunstâncias, que o ângulo  $\phi$ , quando tomado na parte acessível do tronco, é muito próximo daquele mostrado na figura 7, o que garantirá a precisão da metodologia ora proposta.

Sugere-se usar um intervalo entre a medida relativa do diâmetro tomado em 5% e aquele tomado em 15% da altura total da árvore para se obter o ângulo  $\phi$ , conforme está mostrado na figura 10.

**Figura 10 - Obtenção da redução de forma do fuste por trigonometria.**

**Figure 10 - Shaft form reduction trough trigonometry calculation.**



Como se pode observar, a medida do valor de X deverá ser efetuada tomando-se os diâmetros  $d_{0,05}$  e  $d_{0,15}$ , que depois de transformados em raios  $r_{0,05}$  e  $r_{0,15}$ , permitirão obter o valor de X por subtração dos raios e o comprimento deste segmento “s” será obtido, no caso de se tomar 10 medidas relativas no fuste, como segue:

$$X = r_{0,05} - r_{0,15} \quad \text{e} \quad s = \frac{h}{10} \quad (25)$$

$$\tan \phi = \frac{X}{s}$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \frac{X}{s} \quad (26)$$

sendo que X e S devem ser medidos em metros.

Tal procedimento permite estabelecer uma relação matemática entre  $\delta$  e  $\phi$ , cujo ajuste resulta em uma função muito próxima da linear, conforme

se pode observar nos casos padrões tirados de Prodan (1965), apresentados no quadro 2.

**Quadro 2 - Relação entre os parâmetros  $\delta$  e  $\phi$ .**  
 Chart 2 - Relation between  $d$  and  $f$  parameters

Sólidos Geométricos	$\lambda_{0,94}$ médio	$\phi$ - graus	$\delta$	$\beta 1$
Cilindro	1,000	0,0000	1,000	-
Parabolóide	0,518	variável	1,930	0,1074
Cone	0,359	variável	2,786	0,1082
Neilóide	0,282	variável	3,545	0,1095

A função a ser ajustada entre  $\delta$  e  $\phi$  sendo uma reta, terá início sempre em 1, condição específica para o cilindro, remanesecendo apenas a obtenção do coeficiente de inclinação da reta  $\beta$  para ser determinado. O modelo fica assim definido:

$$\delta = 1,000 + \beta \phi \quad (27)$$

Considerando-se a suavidade do parabolóide, com aproximação a um conóide em mais de 80% do fuste, a inclinação da reta  $b$  será obtida para cada árvore especificamente como segue:

- transformar as medidas dos diâmetros  $d_{0,05}$ ,  $d_{0,06}$  e  $d_{0,15}$  em dados relativos, tendo como referência o diâmetro  $d_{0,06}$ , ou seja:  $\eta_{0,01}$ ,  $\eta_{0,06}$  e  $\eta_{0,15}$ ;
- o ângulo  $f$  poderá ser obtido a partir das medidas acessíveis tomadas nas referências relativas 0,05 e 0,15 da altura total como segue:

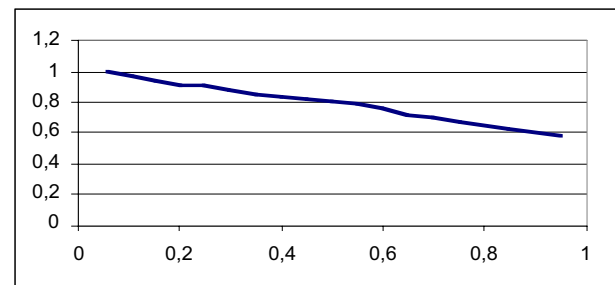
$$\phi = \tan^{-1} \frac{r_{0,05} - r_{0,15}}{l_{0,15} - l_{0,05}} \quad (28)$$

- o valor da constante  $\beta$  da reta que descreve o parabolóide, dado a função ter início sempre no valor 1,000, conforme se pode observar dos dados de uma árvore de araucária medida em São João do Triunfo, PR, apresentado na Figura 13, pode ser obtido como segue:

$$\beta = \frac{1 - \eta_{0,15}}{X_{0,15} - X_{0,06}} = \frac{1 - \eta_{0,15}}{0,09} \quad (29)$$

**Figura 11 - Relacionamento entre  $A_x = y = d_{0,1}/d_{0,06}$  e o valor de  $x = h_i/h$  para uma árvore de araucária de São João do Triunfo, PR**

Figure 11 - Relationship between  $A_x = y = d_{0,1}/d_{0,06}$  and the value of  $x = h_i/h$  for an araucaria tree from São João do Triunfo, PR



- com os valores de  $\phi$  e  $\beta$  conhecidos para cada árvore, pode-se calcular o valor de  $\delta$ , usando-se (27).

O volume da árvore será finalmente obtido como segue:

$$V = \frac{\pi}{4\delta} d_{0,06}^2 h \quad (30)$$

### Resultados

Os resultados do presente trabalho estão apresentados em duas etapas, para assegurar uma melhor compreensão da evolução conceitual, que permitiu ao autor formular a proposta do cálculo de volumes pela Equivalência Volumétrica.

Para se testar a eficiência das estimativas pela nova concepção da Equivalência Volumétrica, foram tomadas 5 árvores de araucária medidas na Estação Experimental de São João do Triunfo,

PR, cujos resultados das transformações para se chegar aos volumes, calculados pela metodologia proposta, estão apresentados nos quadros 3, 4 e 5.

**Quadro 3 - Séries diamétricas absolutas tomadas em cinco árvores de araucária em São João do Triunfo, PR.**

*Chart 3 - Absolute DBH series measured on five araucaria trees from São João do Triunfo, PR.*

Arv Nº	Alt m	Diâmetros Absolutos Cm											
		DAP	0,05	0,06	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
1	19,3	1,30	0,96	1,15	2,89	4,82	6,75	8,68	10,6	12,5	14,4	16,4	18,3
		0	5	8	5	5	5	5	1	4	7	0	3
		46,0	47,7	46,7	43,2	40,3	38,4	36,0	34,5	31,6	28,2	24,8	21,4
		0											
2	23,8	1,30	1,19	1,42	3,57	5,95	8,33	10,7	13,0	15,4	17,8	20,2	22,6
		0	0	8	0	0	0	1	9	7	5	3	1
		55,0	55,2	54,7	48,8	47,0	44,0	41,0	30,2	36,8	32,6	27,2	21,8
3	21,2	1,30	1,06	1,27	3,18	5,30	7,42	9,54	11,6	13,7	15,9	18,0	20,1
		0	0	2	0	0	0	0	6	8	0	2	4
		47,5	50,7	47,9	45,0	43,5	40,8	39,2	37,6	34,4	32,3	30,0	28,0
4	21,8	1,30	1,09	1,30	3,27	5,45	7,63	9,81	11,9	14,1	16,3	18,5	20,7
		0	0	8	0	0	0	0	9	7	5	3	1
		44,0	44,5	44,0	39,6	37,9	36,8	33,5	30,8	28,1	25,9	23,9	20,6
5	18,3	1,30	,915	1,09	2,74	4,57	6,40	8,23	10,0	11,8	13,7	15,5	17,3
		0	49,8	8	5	5	5	5	6	9	2	5	8
		49,0		49,4	46,5	44,6	43,2	41,4	38,7	35,9	33,2	30,9	28,6

**Quadro 4 - Séries diamétricas relativas de forma conforme proposto por Hohenadl.**

*Chart 4 - Form relative DBH series as proposed by Hohenadl.*

Arv Nº	Alt m	Diâmetros Relativos $\eta_{0,i}$											
		DAP	0,05	0,06	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
1	19,3	1,30	0,96	1,15	2,89	4,82	6,75	8,68	10,6	12,5	14,4	16,4	18,3
		0	5	8	5	5	5	5	1	4	7	0	3
		0,98	1,02	1,00	0,92	0,86	0,82	0,77	0,73	0,67	0,60	0,53	0,44
		5	1	0	5	3	2	1	9	7	4	1	9
2	23,8	1,30	1,19	1,42	3,57	5,95	8,33	10,7	13,0	15,4	17,8	20,2	22,6
		0	0	8	0	0	0	1	9	7	5	3	1
		1,00	1,00	1,00	0,89	0,85	0,80	0,74	0,71	0,67	0,59	0,49	0,39
		5	9	0	2	9	4	9	7	3	6	7	8
3	21,2	1,30	1,06	1,27	3,18	5,30	7,42	9,54	11,6	13,7	15,9	18,0	20,1
		0	0	2	0	0	0	0	6	8	0	2	4
		0,99	1,05	1,00	0,93	0,90	0,85	0,81	0,78	0,71	0,67	0,62	0,58
		2	8	0	9	8	2	8	5	8	4	6	4
4	21,8	1,30	1,09	1,30	3,27	5,45	7,63	9,81	11,9	14,1	16,3	18,5	20,7
		0	0	8	0	0	0	0	9	7	5	3	1
		1,00	1,01	1,00	0,90	0,86	0,83	0,76	0,70	0,63	0,58	0,54	0,46
		0	1	0	0	1	6	1	0	9	9	3	8
5	18,3	1,30	,915	1,09	2,74	4,57	6,40	8,23	10,0	11,8	13,7	15,5	17,3
		0	1,00	8	5	5	5	5	6	9	2	5	8
		0,99	8	1,00	0,94	0,90	0,87	0,83	0,78	0,72	0,67	0,62	0,57
		2	0	0	1	3	4	8	3	7	2	6	9

**Quadro 5 - Síntese dos cálculos usando-se o procedimento de Equivalência Volumétrica.**  
 Chart 5 - Synthesis of the calculations using the volumetric equivalence procedure.

Árvore N°	$\lambda_{0,06}$	Vol. Real (m <sup>3</sup> )		$\phi$	$\beta$	$\delta$	4 $\delta$	Volume m <sup>3</sup>
		$d_q^2$	$\lambda_{0,06}$					
1	0,62	1,909	2,050	0,65	0,8333	1,5416	6,166	2,145
2	0,59	3,070	3,299	0,77	1,2000	1,9240	7,696	2,907
3	0,68	2,499	2,598	0,75	0,6777	1,5083	6,033	2,533
4	0,60	1,859	1,989	0,63	1,1111	1,6999	6,799	1,950
5	0,68	2,281	2,385	0,50	0,6555	1,3277	5,311	2,642

Na maioria das vezes, as empresas florestais, as consultoras e profissionais utilizam funções publicadas na literatura para obtenção de volumetria em trabalhos de inventários florestais, dado que a coleta de dados para um número mínimo de

cem árvores é, sem dúvida, um trabalho difícil e moroso. Muitas vezes não há tempo disponível para se desenvolver uma função volumétrica para aquele local específico. Uma demonstração da discrepância nos valores pode ser observada no quadro 6.

**Quadro 6 - Volumetria de cinco araucárias amostradas em São João do Triunfo, PR.**  
 Chart 6 - Tree volume calculation of five araucaria trees sampled in São João do Triunfo, PR.

Árvore N°	Vol. Real (m <sup>3</sup> )		Função de Péllico	Funções de Preussner	Séries Transf. de Péllico	Equival. Volum. m <sup>3</sup>
	$d_q^2$	$\lambda_{0,06}$				
1	1,909	2,050	2,433	1,843	1,775	2,145
2	3,070	3,299	3,338	3,102	3,056	2,907
3	2,499	2,598	2,710	2,114	2,041	2,533
4	1,859	1,989	2,704	1,854	1,834	1,950
5	2,281	2,385	2,376	2,006	1,921	2,642

### Conclusões

- A síntese das metodologias volumétricas desenvolvidas pelos biometristas ao longo dos últimos 200 anos foi fundamental para a concepção e proposição do novo procedimento apresentado neste trabalho, denominado de Equivalência Volumétrica;

- Na concepção teórica da Equivalência Volumétrica, o volume de cada árvore é obtido pela correção do volume de um cilindro tomado em um diâmetro acessível  $d_{0,06}$ , ou seja, em 6% da altura total do fuste, para o volume cilíndrico, que tem como base o diâmetro quadrático médio do fuste -  $d_q$ , equivalente ao volume real da árvore considerada;

- O volume das árvores obtido por meio do procedimento de Equivalência Volumétrica, pressupõe tomar medidas dos diâmetros relativos  $d_{0,05}$ ,  $d_{0,06}$  e  $d_{0,15}$ , para viabilizar a obtenção dos parâmetros fundamentais específicos para cada árvore, ângulo de inclinação do fuste  $\phi$ , coeficiente de inclinação da reta que aproxima à forma do fuste  $\beta$  e coeficiente de correção do volume cilíndrico tomado na base de referência  $d_{0,06}$  para o volume real da árvore -  $\delta$ , tornando tal metodologia totalmente independente de desenvolvimentos prévios de fator de forma ou função volumétrica específicos para uma localidade;

- O procedimento de Equivalência Volumétrica elimina algumas fontes tradicionais de erros, como variações ecológicas das espécies; va-

riações da forma em uma mesma espécie, em função da idade e da qualidade dos sítios onde vegetam e erros dos ajustes de modelos de regressão linear;

- A aplicação do procedimento de Equivalência Volumétrica a cinco árvores da espécie *Araucaria angustifolia* medidas em São João do Triunfo, PR, das quais se conhecia os volumes reais, permitiu que fosse calculada a precisão desta metodologia, resultando em erro médio da ordem de 5,6 %;

- A aplicação de outras metodologias para o cálculo dos volumes das mesmas árvores resultou em erros médios iguais ou superiores àquele obtido na aplicação da Equivalência volumétrica, ou seja, 18,8% para a aplicação da função volumétrica de Péllico Netto, (6,0 %) para a aplicação das funções de forma de Preussner e (5,42 %) para a aplicação das funções de forma com séries transformadas de Péllico Netto;

- O procedimento da Equivalência Volumétrica mostra ser, pela sua praticidade e independência metodológica, uma alternativa atrativa para engenheiros florestais, engenheiros agrônomos, ecólogos e biólogos, que não dispõem de tempo para coleta de dados e ajuste de funções volumétricas para cada área onde se efetuam levantamentos florestais.

## Referências

BREYMAN, K. **Anleitung zur Holzmesskunst, Waldtragsbestimmung und Waldwerthberechnung.** Wien, 1868.

HOHENADL, W. Der Aufbau der Baumschafte. **Fw. Cbt.** 1924.

HOSSFELD, W. **Niedere und höhere praktische Stereometric aller regel- und unregelmässigen Körper und der Bäume im Walde usw.** Leipzig, (1812), cit. Prodan (1965), 1849.

HUBER, F. X. **Hilfstabellen für Bedinstete des Forst- u. Baufachs zunächst zur leichten und schnellen Berechnung des Massengehaltes roher Holzstämmen usw.** München: [s. n.], 1828.

KO, Y.Z. **Beziehungen zwischen Formquotienten und Formzahl.** Dissertation, Naturwissenschaftlich-Mathematische Fakultät der Albert-Ludwigs Universität zu Freiburg i. Br. 1968. 118 s.

KRÜNITZ, G. **Ökonomische Encyklopaedie,** [S.l.: s. n.], 1781.

PÉLLICO NETTO, S. Die Forstinventuren in Brasilien. Neue Entwicklungen und ihr Beitrag für eine geregelte Forstwirtschaft. **Mitteilungen aus dem Arbeitskreis für Forstliche Biometrie.** 1979. 232 s., (Dissertation).

PRODAN, M. **Holzmesslehre.** Frankfurt am Mein: Sauerlanger's Verlag, 1965. 644 s.

RIECKE, F. **Über die Berechnung des körplichen Inhalts unbeschlagener Baumstämmen.** Stuttgart: [s. n.], 1840. 75 S.

SMALIAN, H. L. **Beitrag zur Holzmesskunst.** Strausund (1804), cit. Prodan (1965), 1837.

SIMONI, O. **Über Formzahlgleichungen und deren forst-mathematische Verwertung.** Wien, [s. n.], 1904.

Aprovado 30/09/2003

Recebido 30/05/2003